

Temps de groupe et largeur de bande de signaux modulés simultanément en amplitude et en fréquence

Roger GENDRIN *

Patrick ROBERT *

Analyse

On décrit certaines caractéristiques de la représentation « fréquence-temps » d'un signal modulé simultanément en amplitude et en fréquence. Des formules approchées sur la largeur de bande B et la durée de groupe θ sont données dans les cas où l'une ou l'autre des variations (en amplitude ou en fréquence) est prépondérante. Le calcul exact de B et de θ est donné pour un signal dont la fréquence varie linéairement au cours du temps et dont la variation d'amplitude est représentée par une gaussienne. On met en évidence que la loi du temps de groupe en fonction de la fréquence peut être complexe pour les signaux de durée brève.

Mots clés : Théorie signal, Signal analytique, Modulation amplitude, Modulation fréquence, Modulation hybride, Largeur de bande, Durée, Fréquence instantanée, Variation rapide, Analyse spectrale, Spectre temporel.

GROUP TIME DELAY AND BANDWIDTH OF SIGNALS SIMULTANEOUSLY MODULATED IN AMPLITUDE AND IN FREQUENCY

Abstract

Some properties of the frequency-time representation of a signal simultaneously modulated in amplitude and in frequency are discussed. Approximate formulas are given for the signal bandwidth B and group duration θ , in the two extreme cases in which either the amplitude or the frequency variation is the dominant process. The exact computation of B and θ is made for a signal whose frequency varies linearly with time and whose amplitude is characterized by a gaussian function. The complexity of the group time delay versus frequency law is evidenced.

Key words : Signal theory, Analytical signal, Amplitude modulation, Frequency modulation, Hybrid modulation, Bandwidth, Duration, Instantaneous frequency, Fast variation, Spectral analysis, Time spectrum.

Sommaire

1. Introduction.
2. Représentation « fréquence-temps » de signaux variables.
3. Largeur de bande et durée de groupe.
4. Calcul exact de la largeur de bande et de la durée de groupe.
5. Exemples d'application.
6. Conclusion.

Appendice.

Bibliographie (21 réf.).

1. INTRODUCTION

Les problèmes liés à la représentation « fréquence-temps » de signaux rapidement variables ont acquis une grande importance. La visualisation tridimensionnelle de l'évolution de la fréquence et de l'amplitude d'un signal au cours du temps fournit en effet une image parlante et immédiatement saisissable des propriétés *instantanées* du signal et de leur variation au cours du temps. Lorsqu'il s'agit d'un signal naturel (émissions électromagnétiques de l'environnement terrestre, ondes sismiques, signaux acoustiques...), la bande de fréquence couverte par le signal fournit une information sur le domaine d'excitation de la source. Lorsque, à l'inverse, celle-ci est connue, on peut en déduire les propriétés d'absorption, constantes ou variables, du milieu traversé par le signal. De leur côté, les écarts de fréquence observés renseignent sur d'éventuels effets Doppler liés au déplacement de la source ou du milieu, cependant que le retard mesuré de l'arrivée de chaque fréquence définit les propriétés de dispersion de ce dernier (*).

Toutefois, l'imbrication, au niveau du récepteur, des effets liés à la variation d'amplitude et de ceux

* Département Ondes dans les Plasmas Naturels. Centre National d'Etudes des Télécommunications, 92131 Issy-les-Moulineaux, France.

(*) On pourra consulter à ce sujet les Actes du Huitième Colloque sur le Traitement du Signal et ses Applications, organisé par le GRETSI, Nice, juin 1981.

produits par la variation de fréquence, peut rendre l'analyse délicate. Le but de ce travail est de préciser certaines conséquences de cette imbrication.

Nous nous plaçons, dans cette étude, dans le cadre classique de l'analyse spectrale *instantanée* [1-4]. Une telle technique constitue en effet l'outil le mieux adapté à une représentation *parlante*, même si le tracé de la fonction d'ambiguïté contient de fait les mêmes informations, ou si l'adaptation aux phénomènes variables des techniques de prédiction linéaire [5, 6] permet d'améliorer la restitution de la loi « fréquence-temps », mais au détriment quelquefois de l'information sur la puissance spectrale [7].

Les propriétés de la représentation spectrale d'un signal dont à la fois l'amplitude et la fréquence varient rapidement au cours du temps sont complexes. Après un bref rappel des résultats antérieurs obtenus dans ce domaine (paragraphe 2), nous établirons (paragraphe 3) des formules approchées de la largeur spectrale et du temps de groupe dans les deux cas extrêmes où l'une ou l'autre des deux variations (amplitude ou fréquence) constitue le phénomène prépondérant. Le calcul exact du temps de groupe, établi selon la formule de Ville [1], sera développé dans le paragraphe 4, cependant qu'une application pratique au cas d'un signal modulé en fréquence mais de durée très brève sera présentée au paragraphe 5.

2. REPRÉSENTATION « FRÉQUENCE-TEMPS » DE SIGNAUX VARIABLES

L'utilisation de la notion de signal analytique associé à un signal réel permet de définir les concepts de fréquence instantanée f_i et de temps de groupe t_g [1, 2]. Elle permet aussi de définir des expressions de la densité d'énergie en fréquence et en temps dont une des plus connues, parmi toutes les fonctions de pondération que l'on peut utiliser dans une représentation conjointe [3, 8], est celle de Rihaczek [9] :

$$\varepsilon(t, f) = z(t) Z^*(f) \exp[-2i\pi ft],$$

où $z(t)$ est le signal analytique associé au signal réel $x(t)$ et où $Z(f)$ est la transformée de Fourier de $z(t)$.

Au cours de cet article, nous utiliserons cependant une expression légèrement modifiée (méthode de la fenêtre glissante) consistant à multiplier l'expression précédente par une fonction de filtre et par sa transformée décalée en temps et en fréquence [10, 11].

Dans le cas de signaux modulés simultanément en amplitude et en fréquence, à faible valeur du produit bande-durée, les deux lois $f_i(t)$ et $t_g(f)$ ne sont pas réciproques et la restitution de l'une ou l'autre de ces lois nécessite l'adoption d'une méthode particulière de traitement [12]. Pour un signal dont la fréquence instantanée varie linéairement au cours

du temps et dont l'amplitude est modulée par une gaussienne, du type

$$(1) \quad x(t) = \exp[-\pi\gamma t^2] \cos[2\pi(f_0 t + \beta t^2/2)].$$

Kodera *et al.* [12] ont montré que f_i et t_g étaient donnés par les expressions (*) :

$$(2) \quad f_i = f_0 + \beta t,$$

$$(3) \quad t_g = \beta(f - f_0)/(\gamma^2 + \beta^2)$$

et que la largeur de bande B du spectre du signal, définie à $-6,8$ dB, soit $\exp[-\pi/4]$, vérifiait :

$$(4) \quad B = [(\beta^2 + \gamma^2)/\gamma]^{1/2}.$$

Dans les mêmes conditions, la *durée* T du signal, définie comme le temps durant lequel l'amplitude du signal est supérieure à $\exp[-\pi/4]$ fois l'amplitude maximale, vaut :

$$(5) \quad T = (1/\gamma)^{1/2}.$$

Les définitions de B et de T comportent toujours une part d'arbitraire. Celles qui sont données ci-dessus ont été choisies pour la commodité des calculs. Elles conduisent à un produit $BT = (1 + \beta^2/\gamma^2)^{1/2}$, qui vaut 1 pour un signal de fréquence constante. L'examen des formules (2) et (3) montre que les lois $f_i(t)$ et $t_g(f)$ ne sont voisines que dans la mesure où $\gamma^2/\beta^2 \ll 1$, c'est-à-dire lorsque la variation relative d'amplitude est faible en regard de la variation relative de fréquence, c'est-à-dire lorsque $BT \gg 1$.

Kodera *et al.* [12] ont également montré que la loi $t_g(f)$ était à peu près reconstituée lorsque l'on traçait la courbe donnant le maximum de l'enveloppe du signal filtré à diverses fréquences, la reconstitution étant d'autant meilleure que la largeur de bande des filtres d'analyse (supposés non causaux) était plus étroite. La figure 1 illustre cet effet sur un signal

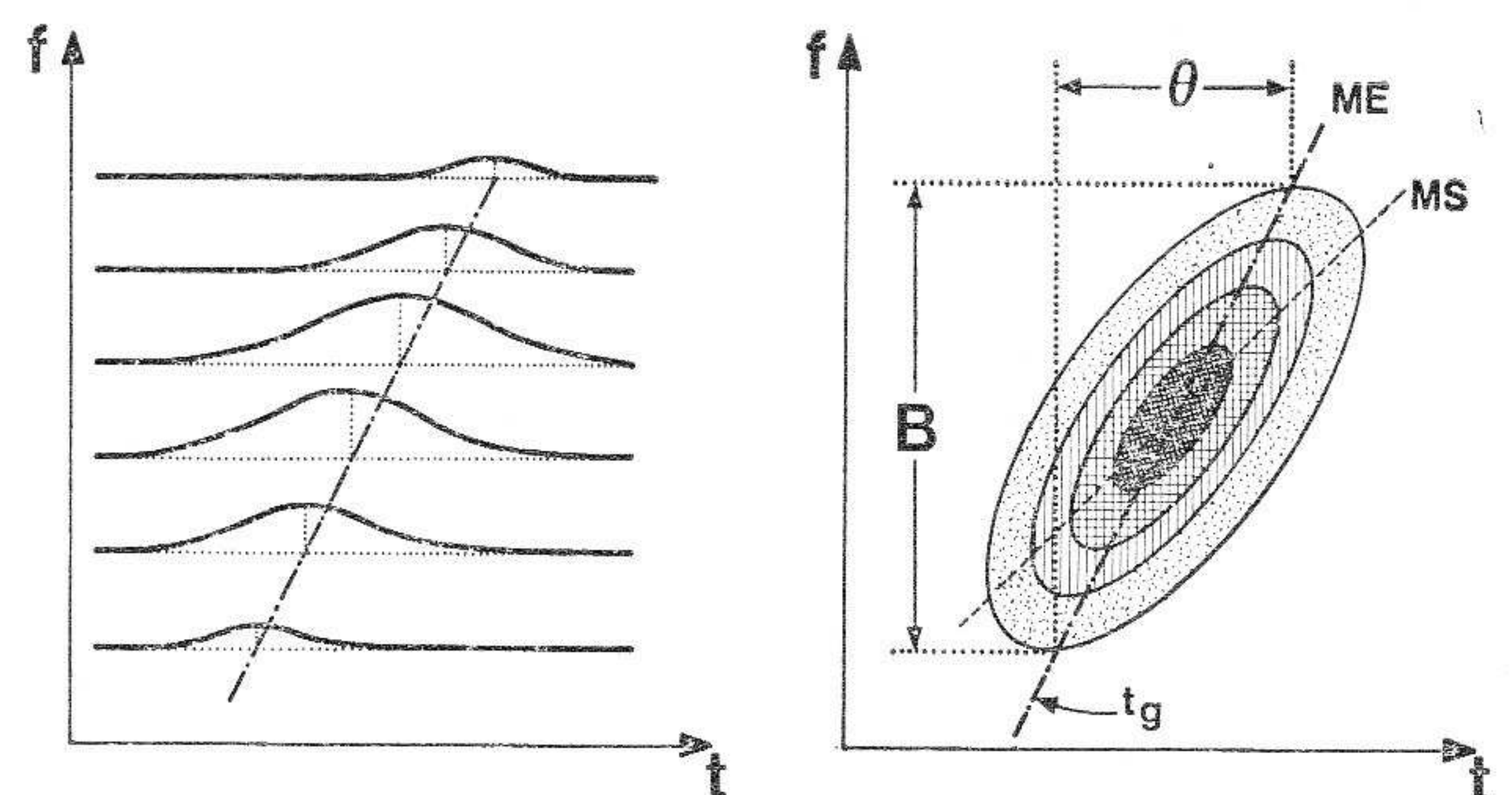


FIG. 1. — Représentation dans le plan fréquence-temps de l'énergie d'un signal modulé linéairement en fréquence et de façon gaussienne en amplitude. *A droite* : courbes d'iso-densité d'énergie. *A gauche* : enveloppe du signal filtré à différentes fréquences. La signification des symboles est donnée dans le texte.

FIG. 1. — Frequency-time representation of the energy of a signal modulated both in frequency (linearly) and in amplitude (gaussian law). Right : iso-energy curves. Left : envelopes of the signal filtered at different frequencies. See text for the definition of symbols.

(*) En fait ces formules ont été obtenues pour un signal $x(t)$ légèrement différent de celui donné par l'équation (1) (cf. paragraphe 4).

du type défini par l'équation (1) pour lequel le produit BT est de l'ordre de 1,5. La partie gauche de la figure représente les enveloppes des réponses de filtres centrés sur des fréquences différentes. La droite du plan t, f qui joint les instants pour lesquels les maximums d'enveloppe (ME) sont obtenus correspond, dans certaines conditions [12], à la loi donnant le temps de groupe en fonction de la fréquence. Elle définit également (partie droite de la figure) le lieu des points où les courbes iso-densité d'énergie ont une tangente horizontale. En revanche, le lieu des points à tangente verticale, qui peut être obtenu expérimentalement en suivant le maximum des spectres (MS) obtenus sur des intervalles de temps courts et successifs, correspond, dans d'autres conditions [12], à la loi donnant la fréquence instantanée en fonction du temps. Un schéma identique à celui de la partie gauche de la figure, mais tourné de 90° , aurait pu illustrer la méthode correspondante.

Bien que la validité des formules de Kodera *et al.* [12] puisse être remise en question pour certaines valeurs des paramètres f_0 , β , γ (voir paragraphe 4), il est néanmoins utile de tirer les conséquences des relations (3) et (4) pour se faire une idée du domaine occupé dans le plan fréquence-temps par la courbe $t_g(f)$.

3. LARGEUR DE BANDE ET DURÉE DE GROUPE

Soit :

$$(6) \quad X(f) = A(f) \exp[i\Phi(f)],$$

la transformée de Fourier du signal $x(t)$. On définit la largeur de bande occupée par le signal comme la différence entre les deux fréquences f_1 et f_2 pour lesquelles :

$$(7) \quad A(f_1) = A(f_2) = \exp[-\pi/4] A(f_{\max}),$$

$f_{\max}$ étant la fréquence pour laquelle A est maximal et qui est, en général, très voisine de f_0 . Si :

$$(8) \quad t_g = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Phi(f)}{\partial f}$$

est le temps de groupe au sens de Ville [1], la durée de groupe θ est définie comme la différence $t_g(f_2) - t_g(f_1)$. On notera que l'énergie du signal se répartit, dans le plan $f-t$, bien au-delà du rectangle défini par B et θ , tout au moins pour les signaux du type étudié, à faible valeur du produit BT (Fig. 1). Mais si l'on s'attache à la restitution de la loi du temps de groupe (en suivant la position des maximums de l'enveloppe du signal filtré par exemple), il est important de bien connaître la durée sur laquelle cette restitution a un sens, ne serait-ce que pour définir à l'avance la résolution en temps nécessaire.

Les expressions exactes de A , Φ et t_g sont données dans le paragraphe suivant. Par calcul numérique, on peut aisément en déduire les lois de variations de B et de θ en fonction du paramètre β (caractéristique de la loi de variation de fréquence) pour diverses valeurs du paramètre γ (caractéristique de la loi de variation d'amplitude). Les calculs, dont les résultats sont présentés aux figures 2 et 3, ont été effectués pour une fréquence centrale f_0 de 1 Hz, qui est celle choisie par Kodera *et al.* [12] pour leurs exemples numériques, et qui correspond à la gamme de fréquence de certains signaux naturels de l'environnement terrestre pour lesquels la mesure du temps de groupe revêt une importance particulière [13-15]. Les résultats obtenus se transposent aisément à d'autres fréquences, en appliquant des facteurs d'échelle f_0 , $1/f_0$, f_0^2 et f_0^2 à B , θ , β et γ respectivement.

L'examen des courbes des figures 2 et 3 montre que, pour le domaine de variation des paramètres

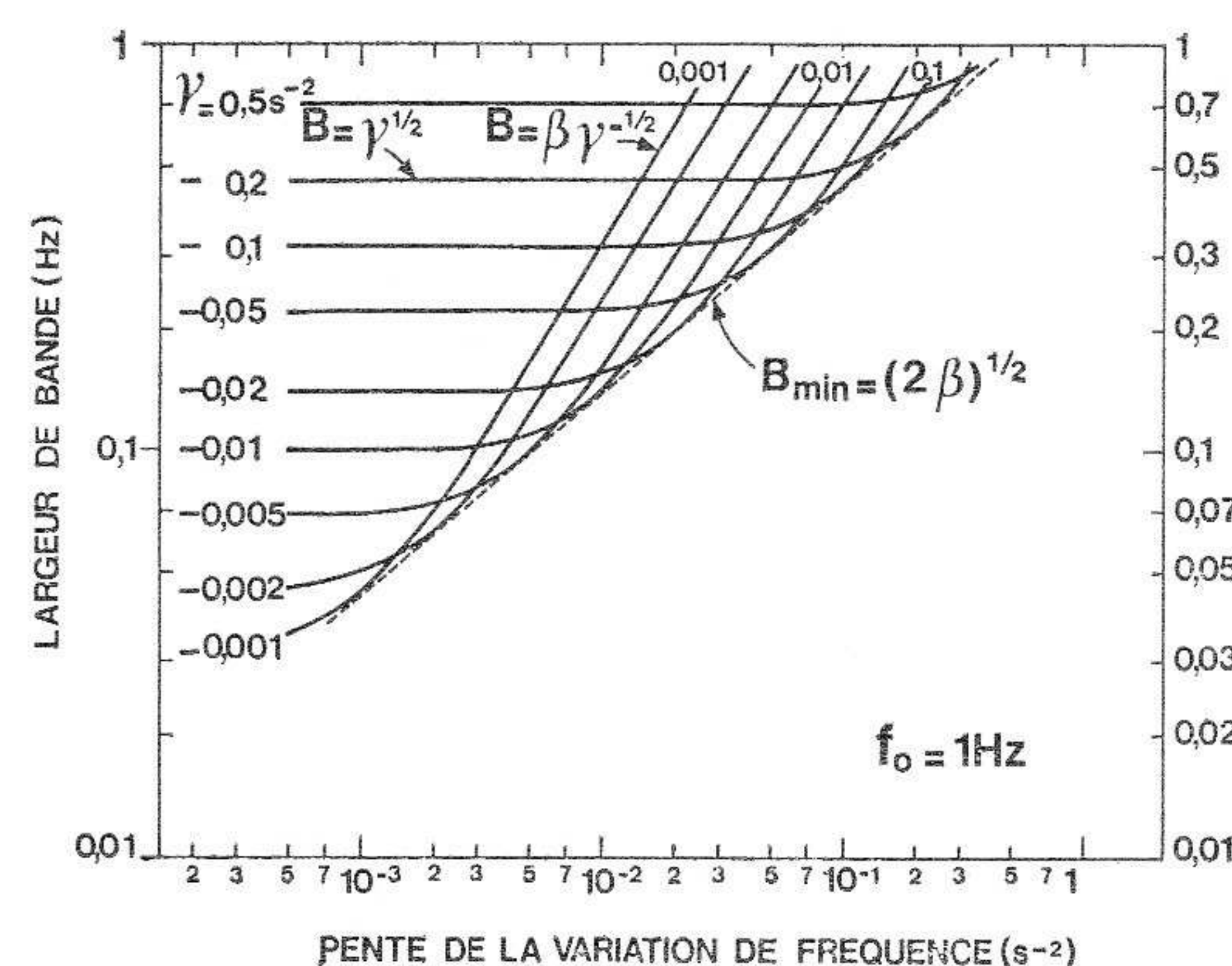


FIG. 2. — Variation de la largeur de bande du spectre du signal en fonction du paramètre β pour différentes valeurs du paramètre γ . Sont également reportées les expressions asymptotiques de B lorsque $\beta \leq \gamma$ ainsi que la valeur $B_{\min}$ obtenue lorsque $\gamma = \gamma_{\text{opt}}$.

FIG. 2. — Variation of the spectral bandwidth as a function of β (the slope of the frequency vs time law) for different values of γ (the parameter defining the amplitude variation). Asymptotic values of B are also represented, as well as the minimum bandwidth when $\gamma = \gamma_{\text{opt}}$.

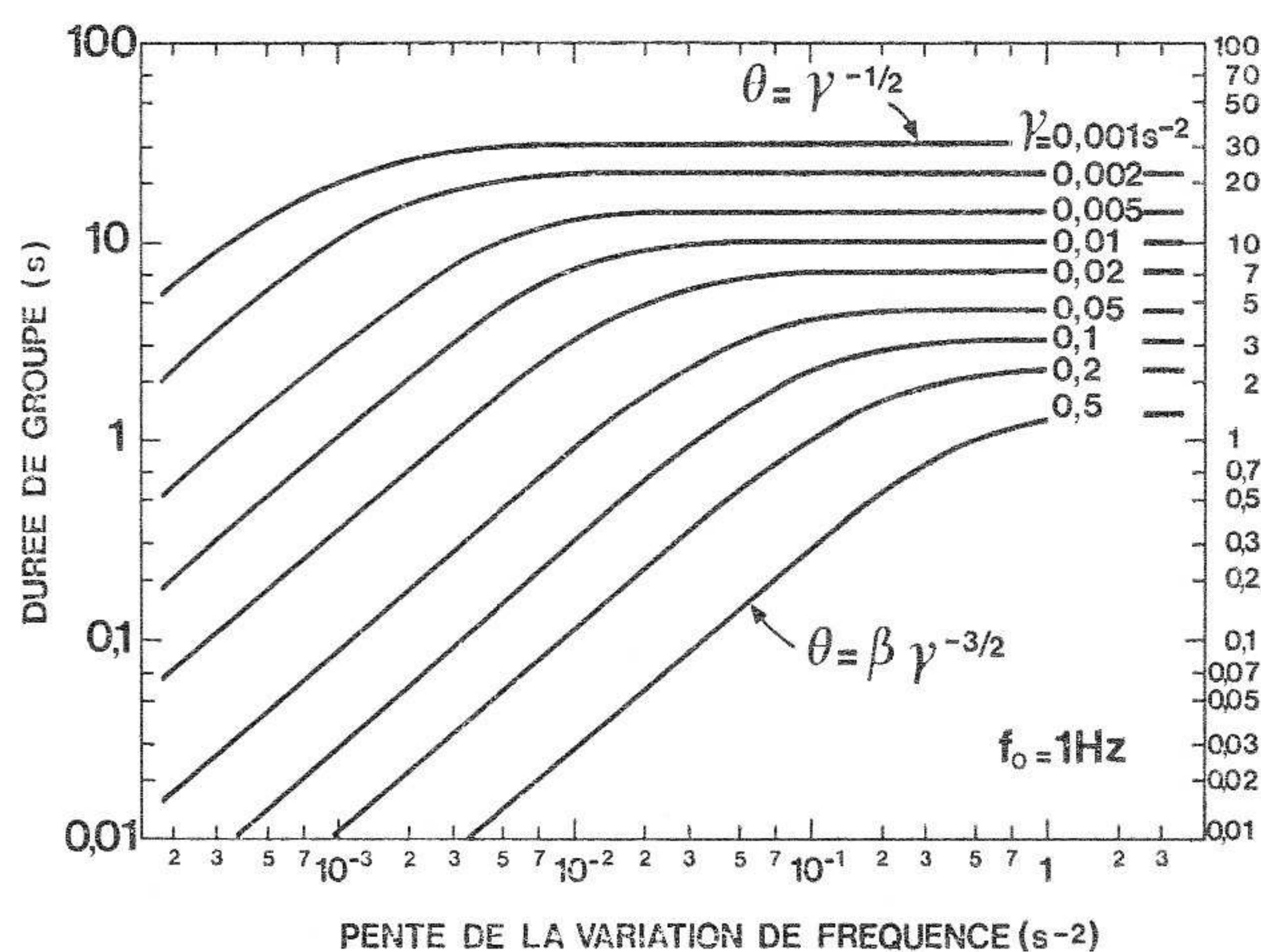


FIG. 3. — Variation de la durée de groupe du spectre du signal. Variation of the group duration of the signal.

présentés, les valeurs exactes de B et θ que l'on peut déterminer à partir des expressions qui seront données dans le paragraphe suivant, s'écartent fort peu des valeurs que l'on peut déduire des formules de Kodera *et al.* [12]. B est donné par (4). Quant à θ , il s'obtient en remplaçant dans (3), $f - f_0$ par B .

$$(9) \quad \theta = \beta / [\gamma(\beta^2 + \gamma^2)]^{1/2}.$$

Les expressions (4) et (9) se prêtent particulièrement bien à l'obtention de formules approchées dans les cas $\beta \ll \gamma$ et $\gamma \ll \beta$:

$$(10) \quad \text{cas } \beta \ll \gamma : B \approx \gamma^{1/2} \quad \theta \approx \beta \gamma^{-3/2},$$

$$(11) \quad \text{cas } \gamma \ll \beta : B \approx \beta \gamma^{-1/2} \quad \theta \approx \gamma^{-1/2}.$$

L'interprétation physique de ces lois approchées est simple. Considérons d'abord le sens que l'on peut donner à la notion d'importance relative de la variation de fréquence par rapport à la variation d'amplitude.

Pour un signal de fréquence constante, la largeur du spectre est égale à l'inverse de la durée du signal. Autrement dit, elle est imposée par la variation d'amplitude :

$$(12) \quad B_A = 1/T = \gamma^{1/2}.$$

Si maintenant le signal est modulé en fréquence, au bout du temps T , les fréquences initiale et finale du signal diffèrent de :

$$(13) \quad B_F = \beta T = \beta \gamma^{-1/2}.$$

La largeur réelle du spectre est déterminée par la combinaison de ces deux effets. Le rôle joué par la modulation en fréquence sur la largeur totale du spectre est important ou non selon que B_F est supérieur ou inférieur à B_A , c'est-à-dire selon que β est supérieur ou inférieur à γ . Lorsque $\beta \ll \gamma$ (signal de fréquence presque pure fortement modulé en amplitude), $B \approx B_A$; lorsque $\beta \gg \gamma$ (signal fortement modulé en fréquence et d'amplitude lentement variable), $B \approx B_F$. On retrouve bien les premières expressions des équations (10) et (11).

Lorsque la modulation de fréquence est très rapide ($\beta \gg \gamma$), la comparaison des formules (2) et (3) montre que les lois $t_g(f)$ et $f_i(t)$ sont identiques. La durée de groupe et la durée du signal sont alors les mêmes : $\theta = T = \gamma^{-1/2}$. On est dans le cas des signaux à grand produit BT ($BT \approx \beta/\gamma$).

Dans le cas contraire, les lois $t_g(f)$ et $f_i(t)$ sont extrêmement différentes. Il est alors intéressant de noter que la valeur de θ porte en elle une information sur la pente de modulation (deuxième relation des équations (10)). La mesure de θ permet donc d'accéder à la valeur de β en gardant la même méthode d'analyse (maximum de l'enveloppe du signal filtré), alors que l'on pensait que pour les signaux à faible produit BT , il fallait une autre méthode pour déterminer β [12]. Les relations (10) montrent en effet que dans ce cas $\beta = \theta B^3$ et qu'il suffit donc de mesurer largeur de bande et durée de groupe pour obtenir la loi de variation de la fréquence instantanée.

La figure 2 montre également que, pour une loi déterminée de variation de fréquence (β fixé), il existe une valeur optimale du coefficient définissant la loi de variation d'amplitude qui rend la largeur de bande minimale. Ceci est obtenu pour :

$$(14) \quad \gamma = \gamma_{\text{opt}} = \beta.$$

L'existence de cet optimum s'explique de la façon suivante. Pour des valeurs de γ faibles, $f_i(t)$ varie dans une large bande fréquentielle avant que l'amplitude du signal n'ait décru de façon notable ; la largeur de bande sera donc importante. Faire croître γ diminuera cette largeur. Mais pour des valeurs de γ trop fortes la durée du signal sera brève, ce qui implique une grande étendue spectrale qui peut être supérieure à la variation de fréquence instantanée apparaissant pendant cette durée. C'est lorsque $\gamma = \beta$ que l'on obtient la largeur de bande minimale :

$$(15) \quad B_{\text{min}} = \sqrt{2\beta}.$$

Il est intéressant de remarquer que cette expression est peu différente de celle qui donne la largeur de bande d'analyse optimale pour les signaux de fréquence variable mais d'amplitude constante [16].

4. CALCUL EXACT DE LA LARGEUR DE BANDE ET DE LA DURÉE DE GROUPE

Les formules de Kodera *et al.* [12], si elles donnent dans la plupart des cas des résultats corrects, ont cependant été établies sur la base d'une erreur de principe qui peut avoir des conséquences importantes dans certains cas extrêmes (D. Aboutadjine, communication privée, 1981).

Kodera *et al.* [12] partent d'un signal de la forme :

$$(16) \quad x_1(t) = \exp[-\pi\gamma t^2] \exp[2i\pi(f_0 t + \beta t^2/2)],$$

auquel ils appliquent, après transformée de Fourier, les relations de Ville [1], ce qui sous-entend que le signal original est analytique. Or ceci est faux, puisque le spectre $X_1(f)$ qu'ils calculent n'est pas identiquement nul pour les valeurs négatives de f . Ceci n'a en soi aucune conséquence pratique lorsque l'on s'intéresse uniquement au temps de groupe. En effet celui-ci se calcule à partir de la phase de la transformée de Fourier du signal analytique associé à $x_1(t)$, et celle-ci n'est autre, à un facteur 2 près, que la transformée de Fourier de $x_1(t)$, pour les fréquences positives tout au moins. En revanche, le calcul de la fréquence instantanée est visiblement entaché d'erreur.

Mais il y a plus grave : l'expression (16) a été choisie parce qu'elle facilite le calcul de la transformée de Fourier. Il est sous-entendu dans l'article [12] que cette expression représente le signal analytique associé au signal réel défini par (1), le seul qui nous intéresse. Ceci ne serait éventuellement exact que si

le spectre de $\exp[-\pi\gamma t^2]$ n'avait aucune composante au-delà de f_0 . Une condition certainement nécessaire pour que :

$$z(t) = a(t) \exp[i\varphi(t)]$$

soit le signal analytique associé au signal réel :

$$x(t) = a(t) \cos[\varphi(t)],$$

est en effet que les supports des transformées de Fourier de $a(t)$ et de $\cos[\varphi(t)]$ soient disjoints [17]. Comme ce n'est manifestement pas le cas ici, il est donc nécessaire d'effectuer le calcul exact de la transformée de Fourier du signal défini par (1). Ce calcul est décrit dans l'appendice mais nous en rapportons ici les résultats.

Le spectre $X(f)$ de $x(t)$ étant traduit en termes d'amplitude $A(f)$ et de phase $\Phi(f)$, on calcule :

$$(17) \quad A(f) = \frac{e^{-\lambda(f^2 + f_0^2)}}{(\beta^2 + \gamma^2)^{1/4}} \times \{\sinh(4\lambda f_0 f) + \cos[2\mu(f^2 + f_0^2) - 2\theta]\}^{1/2},$$

$$(18) \quad t_g(f) = \frac{1}{\gamma^2 + \beta^2} \times \left\{ \frac{\beta f \sinh(4\lambda f_0 f) + \gamma f_0 \sin[2\mu(f_0^2 + f^2) - 2\theta]}{\sinh(4\lambda f_0 f) + \cos[2\mu(f_0^2 + f^2) - 2\theta]} - \beta f_0 \right\},$$

équations dans lesquelles on a posé :

$$(19) \quad \begin{aligned} \lambda &= \pi\gamma/(\gamma^2 + \beta^2), \\ \mu &= \pi\beta/(\gamma^2 + \beta^2), \\ \theta &= (1/2) \arctg(\beta/\gamma). \end{aligned}$$

On montre dans l'appendice que ces formules sont équivalentes à celles de Koder *et al.* [12], dans la mesure où l'argument du sinus hyperbolique est grand devant 1. Cette condition n'est jamais réalisée au voisinage des fréquences nulles, mais l'on peut à la rigueur se désintéresser de celles-ci, surtout si $B/f_0 < 1$: la mesure de t_g ne présente en effet d'intérêt qu'aux fréquences pour lesquelles le signal garde une amplitude raisonnable. En revanche, cette condition impose une limite intrinsèque à la rapidité avec laquelle l'amplitude du signal peut varier. En effet, pour qu'elle soit remplie au moins au voisinage de la fréquence centrale du signal, il faut que :

$$(20) \quad 4\pi\gamma f_0^2/(\gamma^2 + \beta^2) \gg 1.$$

Considérons le cas extrême d'un signal à fréquence constante (si la condition (20) est satisfaite pour ces signaux, elle l'est *a fortiori* pour les signaux à fréquence variable). Soit N le nombre d'oscillations observées pendant la durée T ($Tf_0 = N$). La condition (20) est équivalente à :

$$(21) \quad 4\pi N^2 \gg 1.$$

On voit que N doit être au moins supérieur à 1 pour que la condition (20) soit satisfaite. Autrement dit, pour les signaux extrêmement brefs qui ne comportent même pas une oscillation, les formules de Koder *et al.* [12] cessent d'être valables et ce sont

les formules exactes (17) et (18) qu'il convient d'employer. On notera que la condition (20) est également celle qui assure que le spectre $X(f)$ a une amplitude négligeable pour les fréquences négatives, comme on peut s'en rendre compte en remplaçant f par zéro ou par un nombre négatif dans l'équation (17).

Cette remarque a son importance lorsque l'on sait que l'attention actuelle se porte de plus en plus vers la détection et l'analyse de *solitons*, phénomènes qui sont associés à des mécanismes non linéaires intenses se produisant dans les fluides ou les plasmas, et qui ne comportent qu'un petit nombre, voire une fraction, d'oscillations à la fréquence fondamentale [18].

5. EXEMPLES D'APPLICATION

Pour illustrer les différences entre le calcul exact du temps de groupe et son calcul approché, nous avons choisi deux cas assez proches de la condition limite fournie par l'équation (20). Ces cas sont illustrés aux figures 4 et 5. Dans le premier cas, pour lequel

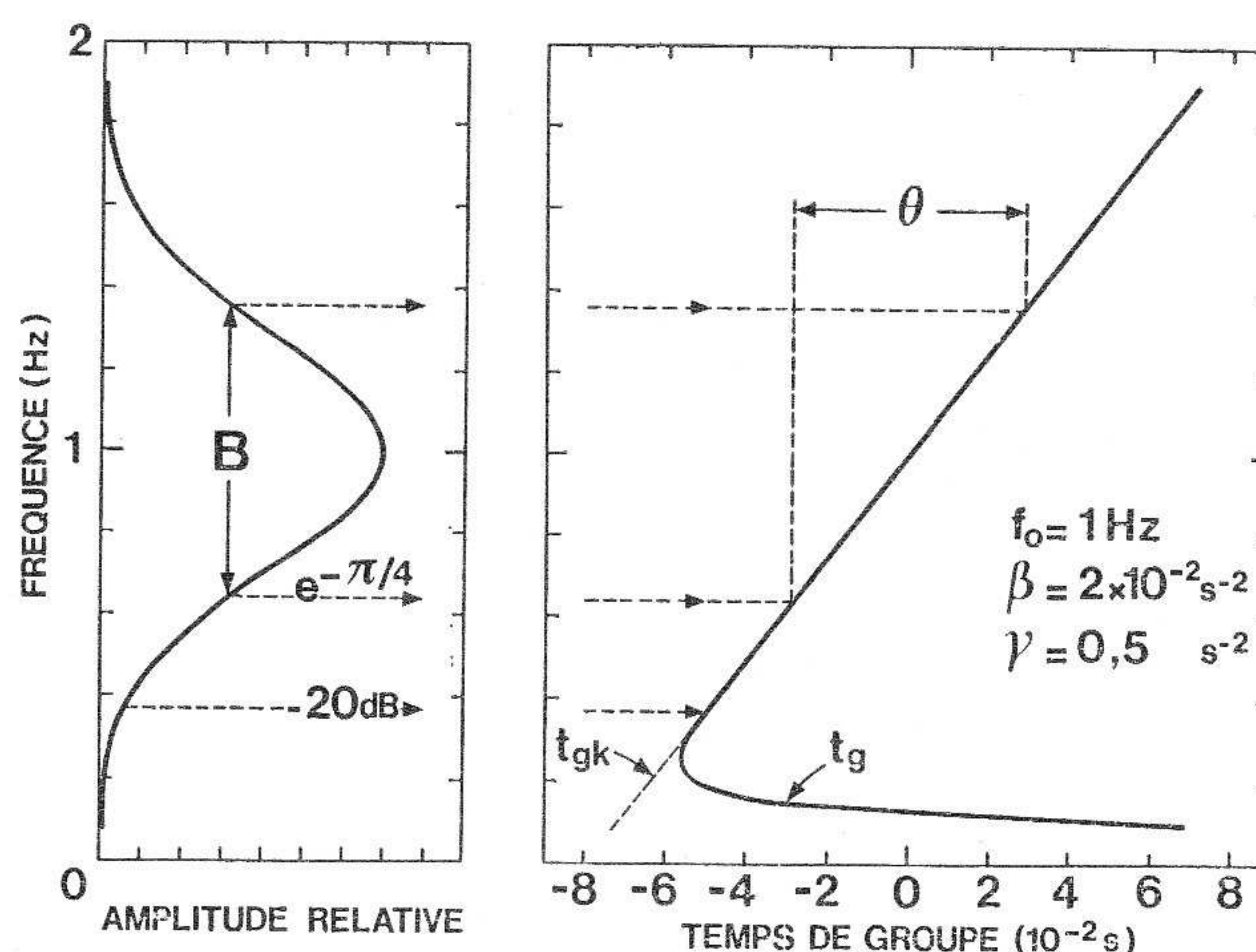


FIG. 4. — Variations de $A(f)$ et de $t_g(f)$ pour un jeu de valeurs particulières de f_0 , β et γ . La loi exacte de t_g diffère peu de celle t_{gK} donnée par Koder *et al.* [12], tout au moins pour les fréquences pour lesquelles $A(f) > A(f_0)/10$.

Variations of $A(f)$ and $t_g(f)$ for a particular set of values of f_0 , β and γ . The exact law giving $t_g(f)$ is not much different from the approximate one, t_{gK} , given by Koder *et al.* [12], at least for frequencies for which $A(f) > A(f_0)/10$.

la largeur de bande est cependant importante ($B/f_0 \approx 0,7$), on ne remarque aucune différence notable entre le temps de groupe obtenu par les formules exactes et le temps de groupe donné dans [12], tout au moins dans la bande de fréquence sur laquelle le signal a une amplitude notable (> -20 dB).

Dans le second cas ($B/f_0 \approx 1$), le changement de sens de variation du temps de groupe avec la fréquence apparaît dans la gamme utile du signal. On note déjà une différence d'environ 4 % pour les

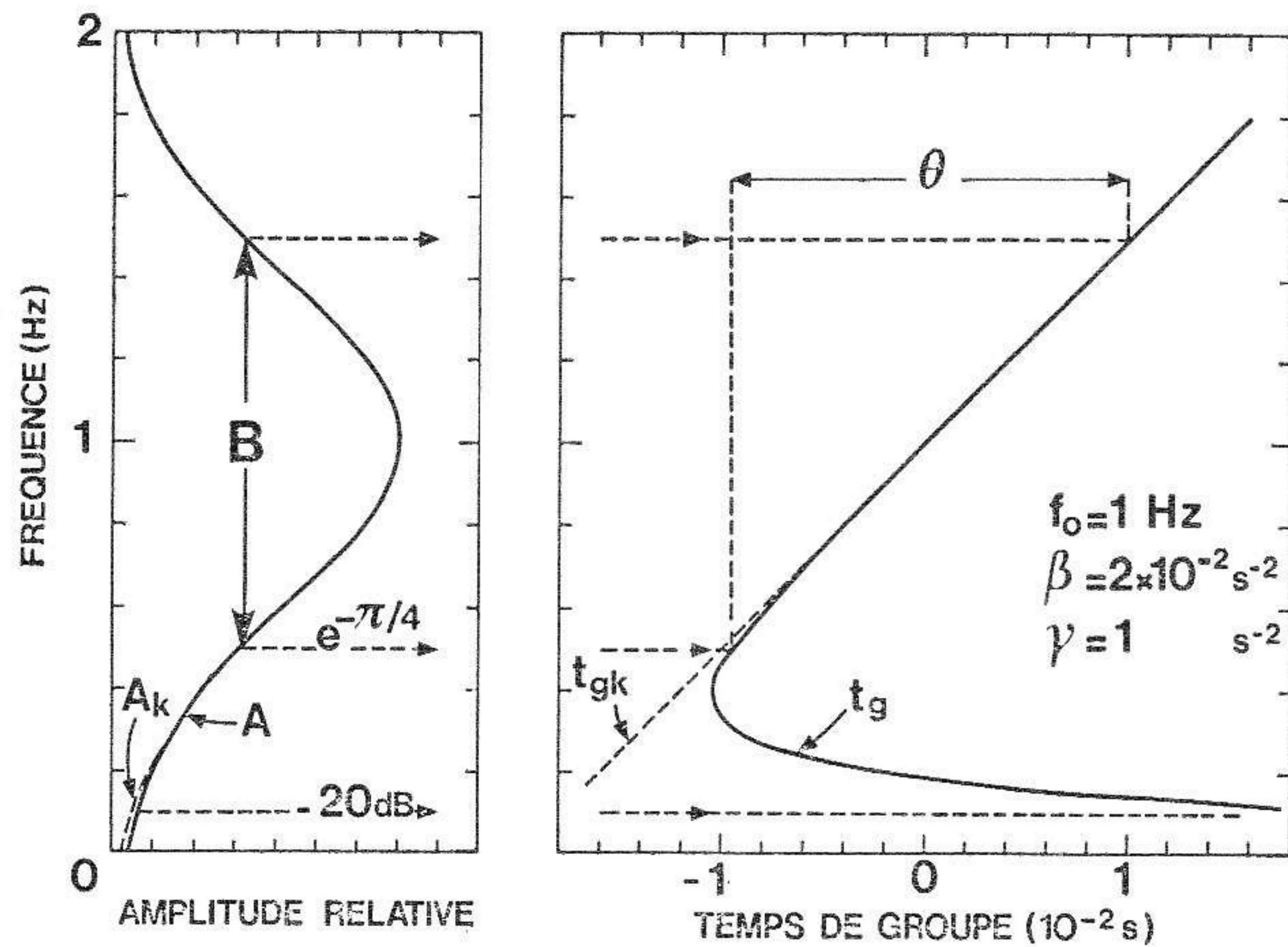


FIG. 5. — Variations de $A(f)$ et de $t_g(f)$ pour un autre jeu de valeurs particulières de f_0 , β et γ . La loi exacte de t_g diffère de celle, t_{gK} , donnée par Koderá *et al.* [12] dès que $A(f) < \exp[-\pi/4] A(f_0)$.

Variations of $A(f)$ and $t_g(f)$ for another set of values of f_0 , β and γ . The exact law giving $t_g(f)$ differs from the approximate one, t_{gK} , as soon as $A(f) < \exp[-\pi/4] A(f_0)$.

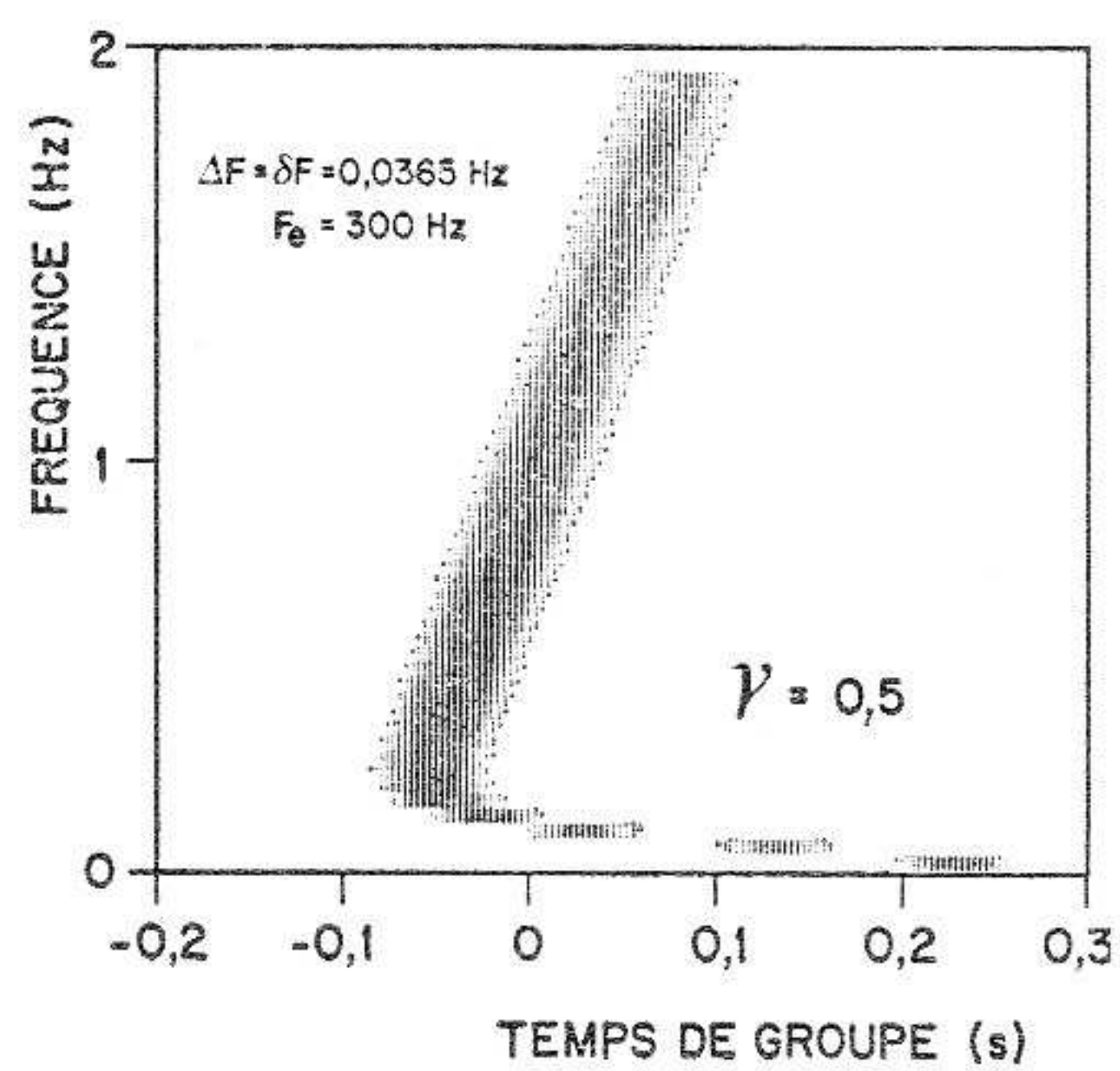


FIG. 6. — Simulation numérique du résultat d'une analyse par la méthode du maximum d'enveloppe du signal étudié à la figure 4. La largeur de bande du filtre d'analyse ΔF est égale au pas minimal de fréquence δf . La différence entre deux niveaux de gris sur chaque ligne horizontale est de 10^{-5} dB. La ligne qui passe par les maximums reproduit bien la variation présentée à la figure 4. Mais la partie basse de la figure correspond à une très faible puissance de signal.

FIG. 6. — Numerical simulation of an analysis done with the Maximum Envelope Method on the signal represented on Figure 4. The bandwidth of the analysing filter ΔF is equal to the minimum frequency step δf . On each horizontal line, the difference between two successive grey levels is 10^{-5} dB.

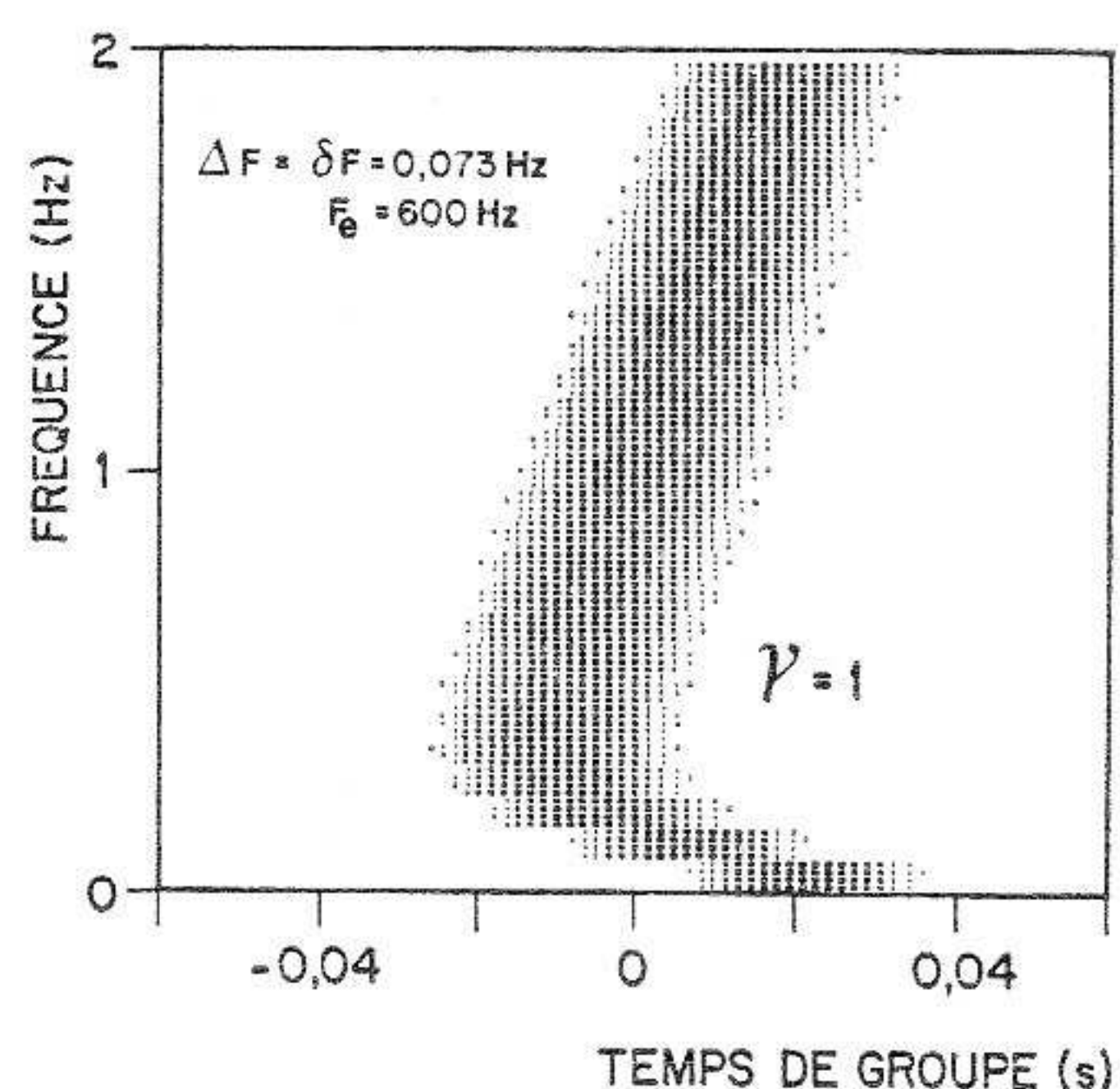


FIG. 7. — Identique à la figure 6 mais pour un signal de durée plus brève. La partie basse de la figure correspond à un signal d'amplitude encore notable (cf. Fig. 5). L'on remarque que le sens de la variation du temps de groupe avec la fréquence y a changé de signe, par rapport à la partie centrale du signal.

FIG. 7. — Same as Figure 6 but for a signal of shorter duration, corresponding to the one represented on Figure 5. Note that dt_g/df changes its sign.

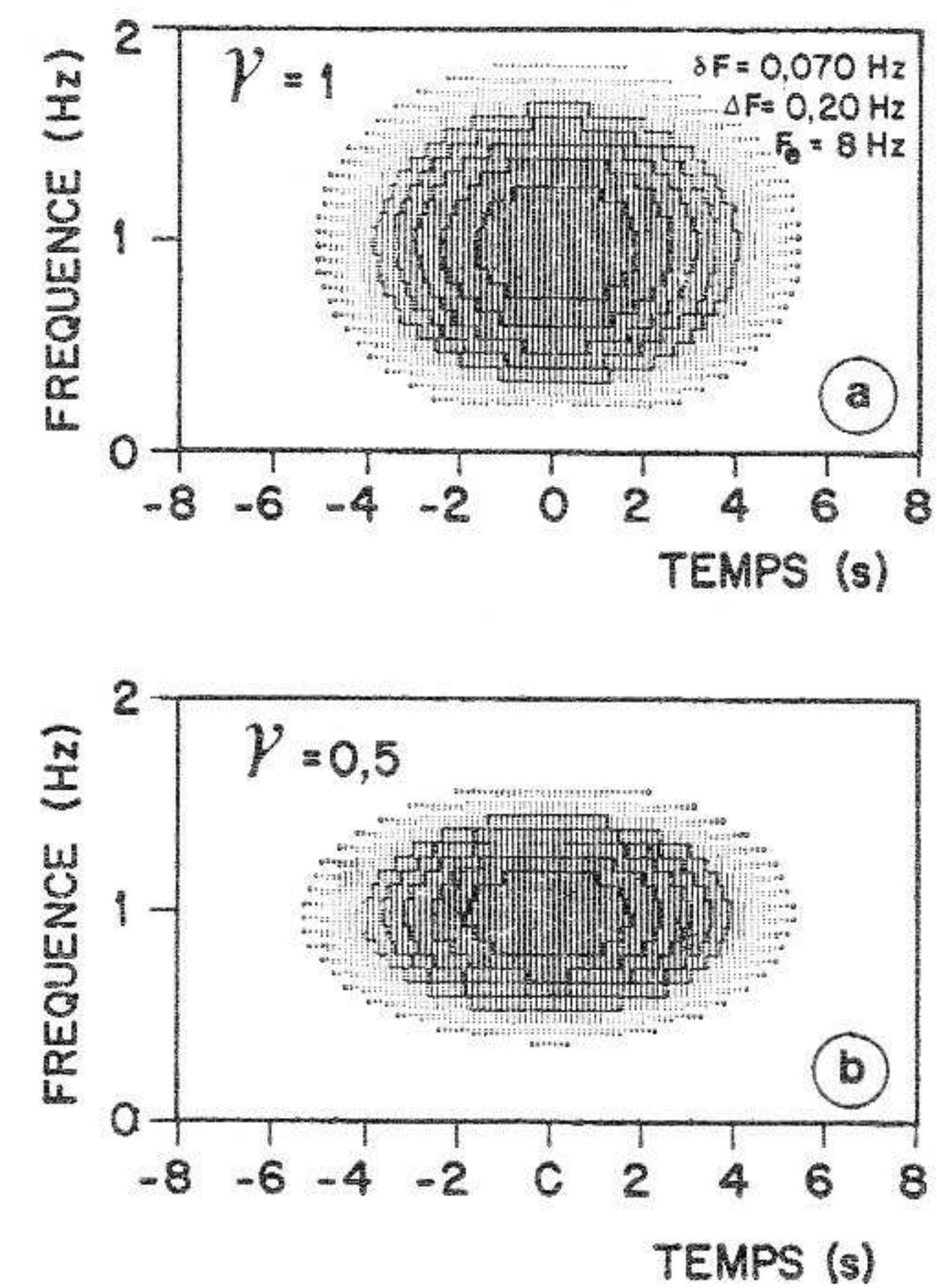


FIG. 8. — Le même signal que pour les figures 6 et 7, mais vu dans la totalité de sa représentation fréquence-temps (méthode de la fenêtre glissante avec une largeur de filtre ΔF égale à 0,2 Hz). La différence entre deux niveaux de grisé successifs est la même dans tout le plan. Elle correspond à une différence de puissance de 2 dB.

FIG. 8. — Same signals as for Figures 6 and 7 but with no discrimination of the grey scaling levels with frequency. The difference between two consecutive grey scaling levels is the same in the whole plane and it corresponds to 2 dB. The Moving Window Method with an analysing bandwidth $\Delta F = 0,2$ Hz has been applied.

fréquences qui correspondent à une amplitude du spectre réduite seulement d'un facteur $\exp[\pi/4]$.

Une simulation numérique a été faite, qui montre que l'analyse spectrale effectuée grâce à la méthode du maximum d'enveloppe restitue correctement les résultats théoriques (Fig. 6 et 7). Toutefois, lorsque l'on considère la répartition de l'énergie dans la totalité du plan fréquence-temps, par l'application simple de la méthode de la fenêtre glissante (Moving Window Method), les finesses de la loi de variation du temps de groupe disparaissent totalement (Fig. 8).

L'obtention des figures 6 et 7 pose un certain nombre de problèmes liés à la durée de groupe extrêmement réduite pour les faibles valeurs du rapport β/γ . La méthode de calcul utilisée s'appuie sur une transformée de Fourier (TF) complète, effectuée sur $N = 8192$ points de signal. Si D est la durée du signal analysé et f_e la fréquence d'échantillonnage, la résolution en fréquence est $\delta f = 1/D$ et la résolution en temps, après TF inverse, est $\delta t = 1/f_e$.

Soient m et n le nombre de points que l'on désire représenter, respectivement en fréquence et en temps. On a :

$$(22) \quad m = B/\delta f, \quad n = \theta/\delta t,$$

où B et θ sont définis par les équations (10). Le nombre de cellules élémentaires est donné par le produit :

$$(23) \quad mn = N\beta/\gamma.$$

Si l'on choisit m et n du même ordre de grandeur, et si l'on souhaite que m et n soient supérieurs ou égaux à 10, ce qui est un minimum pour pouvoir suivre la variation du temps de groupe en fonction de la fréquence, on voit qu'il faut que $N > 100 \gamma/\beta$,

condition qu'il est difficile de réaliser pour les signaux courts à variation lente de fréquence. Dans les exemples simulés présentés aux figures 6 et 7, $\gamma = 0,5$ ou 1 s^{-2} et $\beta = 2 \times 10^{-2} \text{ s}^{-2}$, en sorte que la condition est satisfaite avec $N = 8192$. En choisissant :

$$(24) \quad m = n = \gamma(N\beta/\gamma)^{1/2},$$

on voit que l'on définit la fréquence d'échantillonnage qu'il convient d'utiliser et qui vaut :

$$(25) \quad f_e = \gamma(N/\beta)^{1/2}.$$

Dans ces conditions, les résolutions en fréquence et en temps valent respectivement :

$$(26) \quad \begin{cases} \delta f = (\gamma^2/N\beta)^{1/2}, \\ \delta t = (\beta/N\gamma^2)^{1/2}. \end{cases}$$

Dans les exemples présentés, on a choisi des fréquences d'échantillonnage voisines des valeurs théoriques, qui sont égales à 640 Hz pour le cas de la figure 6 et à 320 Hz pour le cas de la figure 7.

Il est un autre problème dont il convient de tenir compte. C'est celui du rapport d'amplitude correspondant à deux niveaux de grisé successifs. Au voisinage du maximum, ce rapport, pour deux points séparés en temps de δt , vaut $\exp[-\gamma(\delta t)^2]$. Remplaçant δt par son expression (26), on voit que le rapport d'amplitude entre ces deux points voisins est égal à $\exp(\beta/N\gamma)$. Si l'on veut que ces deux points soient séparés au niveau de la représentation, il convient que le rapport entre deux niveaux successifs de grisé soit, en décibels, de :

$$(27) \quad R = 8,7(\beta/N\gamma).$$

Pour les valeurs de β et γ choisies, R est de l'ordre de 10^{-4} dB. La dynamique utile du signal dans son ensemble étant de 20 dB, on voit qu'il est impossible de garder le même rapport de code de grisé dans toute la partie utile du plan f - t si l'on veut n'utiliser qu'un nombre restreint de niveaux codés. C'est pourquoi les figures 6 et 7 ont été tracées avec un code différent pour chaque ligne, le niveau le plus foncé correspondant toujours à l'amplitude maximale de l'enveloppe à la fréquence considérée. De ce fait, la ligne qui joint les maximums de puissance (obtenus individuellement pour chaque fréquence) reproduit bien la variation $t_g(f)$ représentée aux figures 4 et 5. Mais celle-ci n'apparaît plus lorsqu'on représente tout le signal avec un seul et même code de grisé à 10 niveaux, comme c'est le cas pour la figure 8.

On remarque à cette occasion que la méthode de la fenêtre glissante (transformée de Fourier suivie d'un filtrage à fréquence variable et d'une TF inverse) ne permet nullement de restituer les caractéristiques fréquence-temps du signal, pour ces cas extrêmes du rapport β/γ (le produit bande-durée qui est ici voisin de γ est de l'ordre de grandeur de l'unité). C'est seulement en prenant en compte l'information de phase contenue dans la transformée de Fourier qu'il est possible de restituer ces caractéristiques [12].

6. CONCLUSION

Un calcul exact du spectre d'un signal modulé linéairement en fréquence et de façon gaussienne en amplitude a permis d'évaluer la largeur de bande du signal et sa durée de groupe. Dans la plupart des cas, les résultats obtenus ne diffèrent quasiment pas de ceux fournis par les formules approchées (4) et (9). Des expressions asymptotiques simples ont été obtenues dans le cas où l'une ou l'autre des modulations joue le rôle dominant (équations (10) et (11)). L'intérêt des formules exactes (17) et (18) est surtout sensible dans le cas où le nombre d'oscillations de la porteuse, dans le temps où le signal garde une amplitude raisonnable, est réduit (solitons).

Le cas des signaux à variation de fréquence non linéaire [19] ou à plusieurs composantes [20] qui font apparaître des lois-fantômes dans les représentations fréquence-temps, demeure le sujet d'études futures.

*Manuscrit reçu le 26 novembre 1981,
accepté le 24 février 1982.*

APPENDICE

Calcul du spectre de $x(t)$

Soit le signal réel :

$$(A-1) \quad x(t) = \exp[-\pi\gamma t^2] \cos[2\pi(f_0 t + \beta t^2/2)].$$

Sa transformée de Fourier peut s'écrire :

$$(A-2) \quad X(f) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\gamma t^2} \{ \cos[2\pi(f_0 + f)t + \pi\beta t^2] + \cos[2\pi(f_0 - f)t + \pi\beta t^2] - i \sin[2\pi(f_0 + f)t + \pi\beta t^2] + i \sin[2\pi(f_0 - f)t + \pi\beta t^2] \} dt.$$

On voit apparaître des intégrales portant sur des produits de fonctions exponentielles et de fonctions trigonométriques de fonctions quadratiques. On a [21] :

$$(A-3) \quad I_1 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \sin(px^2 + 2qx) dx = A e^B \sin C,$$

$$(A-4) \quad I_2 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \cos(px^2 + 2qx) dx = A e^B \cos C,$$

avec :

$$(A-5) \quad \begin{cases} A = \sqrt{\pi}/(a^2 + p^2)^{1/4}, \\ B = -aq^2/(a^2 + p^2), \\ C = (1/2) \arctg(p/a) - pq^2/(a^2 + p^2). \end{cases}$$

On calcule alors aisément le spectre que l'on décompose en un terme d'amplitude et un terme de

phase :

$$(A-6) \quad X(f) = A(f) \exp[i\Phi(f)],$$

avec

$$(A-7) \quad A(f) = \frac{e^{-\lambda(f^2 + f_0^2)}}{(\gamma^2 + \beta^2)^{1/4}} \times \{\sinh(4\lambda f_0 f) + \cos[2\mu(f^2 + f_0^2) - 2\theta]\}^{1/2},$$

$$(A-8) \quad \Phi(f) = \arctg \times \left\{ \frac{e^{-2\lambda f f_0} \sin[\mu(f+f_0)^2 - \theta] - e^{2\lambda f f_0} \sin[\mu(f_0 - f)^2 - \theta]}{e^{-2\lambda f f_0} \cos[\mu(f+f_0)^2 - \theta] + e^{2\lambda f f_0} \cos[\mu(f_0 - f)^2 - \theta]} \right\},$$

expressions dans lesquelles λ , μ et θ sont définis par les relations (19) en fonction de β et γ .

De (A-8), on calcule aisément t_g , en utilisant la relation (8) :

$$(A-9) \quad t_g = \frac{1}{\gamma^2 + \beta^2} \times \left\{ \frac{\beta f \sinh(4\lambda f f_0) + \gamma f_0 \sin[2\mu(f_0^2 + f^2) - 2\theta]}{\sinh(4\lambda f f_0) + \cos[2\mu(f_0^2 + f^2) - 2\theta]} - \beta f_0 \right\}.$$

Ce sont les valeurs données par (A-7) et (A-9) qui nous ont servi à tracer les courbes des figures 2 et 3.

Les formules équivalentes que l'on obtient pour le signal non réel (et non analytique) $x_1(t)$ défini par l'équation (14) sont :

$$(A-10) \quad A_1(f) = \frac{e^{-\lambda(f - f_0)^2}}{(\gamma^2 + \beta^2)^{1/4}},$$

$$(A-11) \quad \Phi_1(f) = -\mu(f_0 - f)^2 + \theta,$$

$$(A-12) \quad t_{g1}(f) = \beta(f - f_0)/(\gamma^2 + \beta^2).$$

Elles sont évidemment beaucoup plus simples : en particulier le spectre est un spectre gaussien centré autour de f_0 et le temps de groupe s'annule pour $f = f_0$. Il est facile de voir que les formules (A-7) à (A-9) sont équivalentes aux formules (A-10) à (A-12) au premier ordre près du développement en $1/\sinh(4\lambda f f_0)$.

Autrement dit, et comme l'on pouvait s'y attendre, les formules de Kodera *et al.* [12] ne sont jamais valables au voisinage des fréquences nulles. Mais si le spectre est étroit ($B/f_0 < 1$), elles constituent une bonne approximation, dans la mesure où :

$$(A-13) \quad 4\pi\gamma f_0^2/(\gamma^2 + \beta^2) \gg 1.$$

Comme on peut le vérifier sur (A-10), cette condition est également celle qui assure que $A_1(f) \approx 0$ pour $f < 0$ et qui rend donc le signal $x_1(t)$ quasi analytique. Dans les exemples numériques étudiés par Kodera *et al.* ($f_0 = 1$ Hz, $\beta = 2 \times 10^{-2}$ s $^{-2}$, $\gamma = 10^{-2}$ s $^{-2}$), elle est d'ailleurs amplement vérifiée.

Il convient de noter que si l'on peut assez facilement obtenir une expression exacte pour le temps de groupe, il n'est en revanche pas possible d'obtenir une expression exacte pour la fréquence instantanée au sens de Ville. Ce calcul suppose en effet le calcul de la transformée de Hilbert de $x(t)$, laquelle fait intervenir des intégrales du type :

$$(A-14) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2} \cos(px^2 + 2qx) \frac{dx}{x},$$

pour lesquelles il n'existe pas, à notre connaissance, d'expression analytique simple.

REMERCIEMENTS.

Les auteurs sont reconnaissants à Mr D. Aboutadjine, du Laboratoire d'Electronique et d'Etude des Systèmes Automatiques de la Faculté des Sciences de Rabat (Maroc), qui a attiré leur attention sur la non-analyticité du signal $x_1(t)$, et à Mr K. Kodera, de l'Institut de Recherche Météorologique de Tsukuba (Japon), qui les a éclairés de ses conseils. Ils remercient également Mr B. Escudie, du Laboratoire de Traitement des Signaux de l'Institut de Physique et Chimie Industrielles de Lyon, qui a examiné en détail leur manuscrit et leur a suggéré des modifications utiles.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] VILLE (J.). Théorie et applications de la notion de signal analytique. *Câbles Transmissions*, Fr. (1948) **1**, pp. 61-74.
- [2] BERTHOMIER (C.). Représentation d'un signal dans un plan fréquence instantanée-temps. *Thèse*, Paris (1976).
- [3] ESCUDIE (B.). Représentation en temps et fréquence des signaux d'énergie finie : analyse et observation des signaux. *Ann. Télécommunic.* Fr. (1979) **34**, pp. 101-111.
- [4] FLANDRIN (F.) ESCUDIE (B.). Time and frequency representation of finite energy signals : a physical property as a result of an Hilbertian condition. *Signal Processing Nederl.* (1980), **2**, pp. 93-100.
- [5] FARGETTON (H.), GENDRIN (R.), LACOME (J. L.). Adaptive methods for spectral analysis of time varying signals, in « Signal Processing. Theories and Applications », M. Kunt and F. de Coulon eds., *North-Holland Pub.*, Amsterdam (1980), pp. 777-793.
- [6] GUEGEN (C.), GIANELLA (F.). Analyse spectrale et approximations de formes quadratiques, in « Huitième Colloque sur le Traitement du Signal et ses Applications », GRETSI, Nice (1981), pp. 179-184.
- [7] GRIFFITHS (L. J.). Rapid measurement of digital instantaneous frequency. *IEEE Trans. ASPP*, USA (1975), **23**, pp. 207-222.
- [8] ESCUDIE (B.), GREY (J.). Sur une formulation générale de la représentation en temps et en fréquence dans l'analyse des signaux d'énergie finie. *C. R. Acad. Sci. A*, Fr. (1976), **283**, pp. 1049-1051.
- [9] RIHACZEK (A. W.). Signal energy distribution in time and frequency. *IEEE Trans. IT*, USA (1968), **14**, pp. 369-374.
- [10] KODERA (K.). Analyse numérique des signaux géophysiques non-stationnaires. *Thèse d'Université*, Paris (1976).

- [11] KODERA (K.), VILLEDARY (C. de), GENDRIN (R.). A new method for the numerical analysis of non-stationary signals. *Phys. Earth Planet. Interiors*, Netherl. (1976), **21**, pp. 142-150.
- [12] KODERA (K.), GENDRIN (R.), VILLEDARY (C. de). Analysis of time-varying signals with small BT values. *IEEE Trans. ASSP*, USA (1978), **26**, pp. 64-76.
- [13] GENDRIN (R.). Substorm aspects of magnetic pulsations. *Space Sci. Rev.*, Netherl. (1970), **22**, pp. 54-130.
- [14] GENDRIN (R.), LACOURLY (S.), ROUX (A.), SOLOMON (J.), FEIGUIN (F. Z.), GOKHBERG (M. V.), TROITSKAYA (V. A.), YAKIMENKO (V. L.). Wave-packet propagation in an amplifying medium and its application to the dispersion characteristics and to the generation mechanisms of Pcl events. *Planet. Space Sci.*, U.K. (1971), **19**, pp. 165-194.
- [15] GLANGEAUD (F.). Signal processing for magnetic pulsations. Rapport 23/80. Centre d'Etude des Phénomènes Aléatoires et Géophysiques, Grenoble (1980), *J. Atmos. Terr. Phys.*, U.K. (1981), **43**, pp. 981-998.
- [16] STOREY (L. R. O.). An investigation of whistling atmospherics. *Phil. Trans. Roy. Soc. A*, UK (1953), **246**, pp. 113-141.
- [17] URKOWITZ (H.). Hilbert transform of bandpass functions. *Proc. IRE*, USA (1962), **50**, p. 2143.
- [18] SCOTT (A. C.), CHU (F. Y. F.), McLAUGHIN (D. W.). The soliton : a new concept in applied science. *Proc. IEEE*, USA (1973), **61**, pp. 1443-1483.
- [19] FLANDRIN (P.), ESCUDIE (B.). Géométrie des fonctions d'ambiguïté et des représentations conjointes de Ville : l'approche de la théorie des catastrophes, dans « Huitième Colloque sur le Traitement du Signal et ses Applications ». *GRETSI*, Nice (1981), pp. 69-74.
- [20] GENDRIN (R.), VILLEDARY (C. de). Unambiguous determination of fine structures in multicomponent time-varying signals. *Ann. Télécommunic.*, Fr. (1979), **34**, pp. 122-130.
- [21] GRADSHTEYN (I. S.). Table of Integrals, Series and Products. A. Jeffrey ed., *Academic Press*, New-York (1980).